

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ می‌دانیم ضابطه‌ی اعداد طبیعی فرد به صورت $n = 2k - 1$ است که در آن $k \in \mathbb{N}$ می‌باشد. تعداد اعداد به کار رفته از دسته‌ی اول تا آخرین جمله‌ی دسته‌ی بیستم برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$$

پس آخرین جمله‌ی دسته‌ی بیستم، برابر با ۲۱۰ امین عدد طبیعی فرد است که این عدد برابر خواهد بود با:

$$n = 2 \times 210 - 1 = 419$$

۲ - گزینه ۴

تذکر: در دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت q داریم

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$S_7 = 136 \Rightarrow \frac{a(q^7 - 1)}{q - 1} = 136$$

$$S_8 = 153 \Rightarrow \frac{a(q^8 - 1)}{q - 1} = 153$$

$$\Rightarrow \frac{S_8}{S_7} = \frac{\frac{a(q^8 - 1)}{q - 1}}{\frac{a(q^7 - 1)}{q - 1}} = \frac{153}{136}$$

$$\Rightarrow \frac{q^8 - 1}{q^7 - 1} = \frac{153}{136} \Rightarrow \frac{q^8 - 1}{q^7 - 1} = \frac{9}{8} \Rightarrow q = \frac{9}{8}$$

۳ - گزینه ۲

می‌دانیم: اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

$$(x - 2)(x^2 + mx + m + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + mx + m + 3 = 0 \end{cases}$$

یکی از جواب‌ها $x = 2$ است. اگر جواب‌های معادله $x^2 + mx + m + 3 = 0$ را α و β در نظر بگیریم، با توجه به اینکه مجموع مجذورات جواب‌ها برابر ۱۳ است، بنابراین:

$$2^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 13 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 9 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 \quad (*)$$

چون α و β جواب‌های معادله $x^2 + mx + m + 3 = 0$ هستند، بنابراین:

$$x^2 + mx + m + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -m \\ \alpha \cdot \beta = m + 3 \end{cases} \xrightarrow{(*)} m^2 - 2m - 6 = 9 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = 5 \xrightarrow{\text{در معادله}} x^2 + 5x + 8 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه ندارد.} \\ m = -3 \xrightarrow{\text{در معادله}} x^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

پس تنها $m = -3$ قابل قبول است.

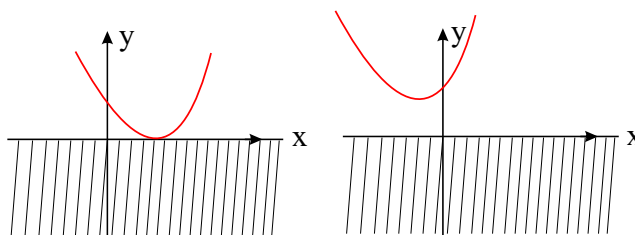
۴ - گزینه ۱ شرط آن که عدد k بین ریشه‌های تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، آن است که: $\Delta > 0$ و $af(k) < 0$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 36 + 4m > 0 \Rightarrow m > -9 \quad (1)$$

$$1f(-1) < 0 \Rightarrow 1 + 6 - m < 0 \Rightarrow m > 7 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow m > 7$$

۵ - گزینه ۱ سهمی که از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند باید به یکی از صورت‌های زیر باشد. با توجه به شکل هر دو سهمی مینیم دارند و یکی از سهمی‌ها فاقد ریشه است و سهمی دیگر بر محور x مماس است.



توجه: برای اینکه یک سهمی مینیم داشته باشد باید ضریب x^2 مثبت باشد. برای اینکه سهمی بر محور x مماس شود و یا ریشه نداشته باشد باید $\Delta \leq 0$



۶ - گزینه ۱ نکته: اگر مجموع دو عدد S و ضرب آن‌ها P باشد، آن دو عدد ریشه‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ می‌باشد.

$$\Delta \leq 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{3})^2 - 4(a-1)(a+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 12 - 4a^2 + 4 \leq 0 \Rightarrow 4a^2 \geq 16 \Rightarrow a^2 \geq 4 \Rightarrow |a| \geq 2 \Rightarrow a \leq -2 \text{ یا } a \geq 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} a \geq 2$$

اگر ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ برابر α و β باشند، پس ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 7x + P = 0$ برابر $\frac{1}{\alpha} + k$ و $\frac{1}{\beta} + k$ هستند که جمع آن‌ها برابر ۷ و ضرب آن‌ها P است.

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow S = \alpha + \beta = 3, P = \alpha \cdot \beta = 1$$

$$S_{\text{جدید}} = \left(\frac{1}{\alpha} + k\right) + \left(\frac{1}{\beta} + k\right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2k = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \cdot \beta} + 2k = \frac{3}{1} + 2k = 7 \rightarrow k = 2$$

$$P_{\text{جدید}} = \left(\frac{1}{\alpha} + k\right)\left(\frac{1}{\beta} + k\right) \xrightarrow{k=2} P_{\text{جدید}} = \left(\frac{1}{\alpha} + 2\right)\left(\frac{1}{\beta} + 2\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + 4 = \frac{1 + 2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 4 \Rightarrow P = 7 + 4 \Rightarrow P = 11$$

پس $P + k = 13$ است.

۷ - گزینه ۳

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$a_1 = 1, d = 3 \rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2 + 3(n-1)) > 400$$

$$\Rightarrow n(3n-1) > 800 \Rightarrow 3n^2 - n - 800 > 0 \quad \Delta = 1 + 9600 = 9601$$

چون n عدد طبیعی است داریم:

$$n > \frac{1 + \sqrt{9601}}{6} \Rightarrow n > 16,49 \rightarrow n \geq 17$$

۸ - گزینه ۴ چون $f(-1) = f(4) = 0$ پس ضابطه f را می‌توانیم به صورت $f(x) = k(x+1)(x-4)$ در نظر بگیریم. از طرف دیگر طول رأس سهمی برابر $\frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$ است و

عرض آن برابر ۵- است. پس:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -5 \Rightarrow k\left(\frac{3}{2} + 1\right)\left(\frac{3}{2} - 4\right) = -5$$

$$-\frac{25}{4}k = -5 \Rightarrow k = \frac{4}{5}$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{4}{5}(x+1)(x-4) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{12}{5}x - \frac{16}{5}$$

پس $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{12}{5}$, $c = -\frac{16}{5}$ و در نتیجه:

$$a + b - c = \frac{4}{5} + \frac{12}{5} + \frac{16}{5} = \frac{32}{5}$$

۹ - گزینه ۳

$$y + 2x = 120 \rightarrow y = 120 - 2x$$

$$S = xy = x(120 - 2x) \rightarrow S = -2x^2 + 120x$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{120}{-4} = 30 \rightarrow S_{\text{max}} = -2 \times 900 + 3600 = 1800$$

۱۰ - گزینه ۳ می‌دانیم: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه $P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$, $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

اگر ریشه‌های معادله جدید را $\alpha\sqrt{\beta}$ و $\beta\sqrt{\alpha}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$S' = \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$$

$$\Rightarrow S'^2 = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = \alpha\beta(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} \quad (1)$$

باتوجه به معادله $x^2 - 12x + 4 = 0$ داریم: $p = \alpha\beta = 4$, $S = \alpha + \beta = 12$

حال این مقادیر را در (۱) جای گذاری می‌کنیم:

$$S'^2 = 4(12) + 2 \times 4 \times \sqrt{4} = 64 \xrightarrow{S' > 0} S' = 8$$



$$P' = \alpha\sqrt{\beta} \times \beta\sqrt{\alpha} = \alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = 4\sqrt{4} = 8$$

معادله جدید برابر است با: $x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 8 = 0$

۱۱ - گزینه ۴ برای معادله درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ اگر x_1 و x_2 ریشه‌ها باشند، آنگاه:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \quad S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

اگر معادله درجه دوم $x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ دارای دو ریشه مثبت باشد، Δ و مجموع ریشه‌ها و حاصل ضرب ریشه‌ها مثبت است.

$$S > 0 \rightarrow -a > 0 \rightarrow a < 0, \quad P > 0 \rightarrow 2a - 3 > 0 \rightarrow a > \frac{3}{2}$$

$$\Delta > 0 \rightarrow a^2 - 8a + 12 > 0 \Rightarrow a < 2 \text{ یا } a > 6$$

سه نامساوی فوق جواب مشترک ندارند یعنی هیچ مقدار a .

توجه کنید که هرگاه $P = \frac{c}{a} > 0$ باشد، باید شرط $\Delta > 0$ بررسی گردد. در غیر این صورت $\Delta > 0$ بررسی نمی‌شود.

۱۲ - گزینه ۱

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_6 = S_1$$

$$S_6 = \frac{6}{2}(2a_1 + 5d) = 3(2a_1 + 5d), \quad S_1 = \frac{1}{2}(2a_1 + 0d) = a_1$$

$$\frac{S_6}{S_1} = \frac{3(2a_1 + 5d)}{a_1} = 1 \Rightarrow 6a_1 + 15d = a_1 \Rightarrow 5a_1 + 15d = 0$$

$$S_{16} = \frac{16}{2}(2a_1 + 15d) = 8(0) = 0$$

۱۳ - گزینه ۱ ابتدا مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 5 \\ \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 3 \end{cases}$$

چون α و β ریشه‌های معادله هستند پس در خود معادله صدق می‌کنند.

$$\text{جواب معادله } \alpha \Rightarrow \alpha^2 - 5\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha - 5) = -3$$

$$\alpha - 5 = \frac{-3}{\alpha} \Rightarrow 5 - \alpha = \frac{3}{\alpha}$$

به همین ترتیب $\beta = \frac{3}{5 - \beta}$ است. پس:

$$A = \frac{\alpha^r}{5 - \beta} + \frac{\beta^r}{5 - \alpha} = \frac{\alpha^r}{\frac{3}{\beta}} + \frac{\beta^r}{\frac{3}{\alpha}} = \frac{\alpha^r \beta + \alpha \beta^r}{3} = \frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)}{3} = 5$$

۱۴ - گزینه ۴ اگر تعداد جملات $2n$ فرض شود، آنگاه:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = S$$

بدیهی است جملات ردیف فرد، تشکیل دنباله هندسی با قدر نسبت q^2 می‌دهد، بنابراین:

$$S = \frac{a_1(1 - (q^2)^n)}{1 - q^2} = \frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q^2} \quad (1)$$

از طرفی مجموع جملات دنباله هندسی با $2n$ جمله برابر است با:

$$S_{2n} = \frac{a_1(1 - (q)^{2n})}{1 - q} = \frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q}$$

حال عبارت (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$S = \frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q} \times \frac{1}{1 + q} = S_{2n} \times \frac{1}{1 + q} \Rightarrow S_{2n} = (1 + q)S$$

۱۵ - گزینه ۱ معادله $f(x) = 0$ باید دو جواب داشته باشد که مجموع و حاصل ضرب آن‌ها مثبت است. بنابراین:

$$\Delta = 20 - 4a(a - 4) > 0 \Rightarrow 4a^2 - 16a - 20 < 0 \Rightarrow -1 < a < 5$$

$$\text{مجموع جوابها} = \frac{2\sqrt{5}}{a} > 0 \Rightarrow a > 0 \quad (2)$$

$$\text{حاصل ضرب جوابها} = \frac{a - 4}{a} > 0 \Rightarrow a > 4 \quad \text{یا} \quad a < 0 \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow 4 < a < 5$$

از طرف دیگر $f(\sqrt{5}) = 5a - 10 + a - 4 = 6a - 14$



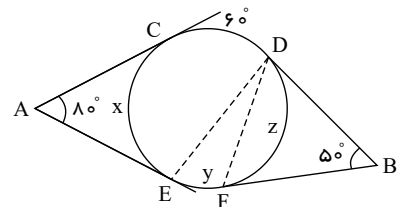
$$\begin{aligned} 4 < a < 5 &\Rightarrow 24 < 6a < 30 \\ 10 < 6a - 14 < 16 \\ 10 < f(\sqrt{5}) < 16 \end{aligned}$$

پاسخنامه تشریحی

۱۶ - گزینه ۳

می‌دانیم اگر طول وترى از یک دایره برابر شعاع آن دایره باشد، اندازه کمان متناظر با آن وتر برابر 60° است، پس $\widehat{CD} = 60^\circ$. باتوجه به فرض و شکل داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{B} &= \frac{(60^\circ + x + y) - z}{2} = 50^\circ \Rightarrow x + y - z = 40^\circ \\ \widehat{A} &= \frac{(60^\circ + y + z) - x}{2} = 80^\circ \Rightarrow y + z - x = 100^\circ \end{aligned} \right\}$$



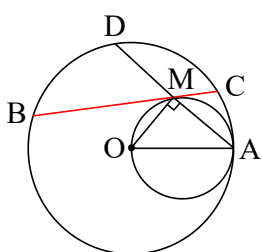
طرفین دو تساوی

$$\rightarrow 2y = 140^\circ \Rightarrow y = 70^\circ \Rightarrow \widehat{EDF} = \frac{y}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

را جمع می‌کنیم

۱۷ - گزینه ۲

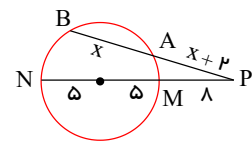
اگر از نقطه‌ی M به نقاط A و O وصل کنیم در این صورت زاویه‌ی \widehat{M} قائمه خواهد بود زیرا محاطی و روبرو به قطر می‌باشد. از آنجا که OM بر وتر AD عمود است پس $MA = MD$ و طبق روابط طولی در دایره داریم:



$$MB \times MC = MA \times MD \xrightarrow{MA=MD} MB \times MC = MA^2$$

۱۸ - گزینه ۳ اگر طول AB را x در نظر بگیریم آنگاه از فرض نتیجه می‌گیریم $PA = x + 2$. نقطه P را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم و از رابطه طولی در دایره استفاده می‌کنیم:

$$PA \times PB = PM \cdot PN \Rightarrow (2x + 2)(x + 2) = 8 \times 18 \Rightarrow (x + 1)(x + 2) = 8 \times 9 \\ \Rightarrow x = AB = 7$$



۱۹ - گزینه ۳ اگر از O به B وصل کنیم، داریم:

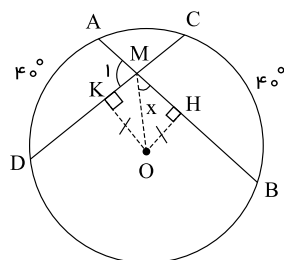
$$\begin{aligned} \widehat{OBC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PBC} = 90^\circ - \widehat{OBP} \\ \widehat{OAB} : OB = OA \Rightarrow \widehat{OBP} = \widehat{OAP} \Rightarrow 90^\circ - \widehat{OBP} = 90^\circ - \widehat{OAP} \\ \Rightarrow \widehat{PBC} = \widehat{OPA} = \widehat{CPB} \Rightarrow PC = BC = 6 \end{aligned}$$

با نوشتن روابط طولی در دایره داریم:

$$CB^2 = CE \times CM \Rightarrow CB^2 = (CP - PE)(2R + CP - PE) \Rightarrow 36 = (6 - PE)\left(2 \times \frac{5}{2} + 6 - PE\right) \\ \Rightarrow 36 = (6 - PE)(11 - PE) \Rightarrow PE = 2$$

۲۰ - گزینه ۳

کمان‌های نظیر وترهای مساوی با یکدیگر برابرند. پس:



$$AB = CD \rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} \rightarrow \widehat{AC} + \widehat{BC} = \widehat{AC} + \widehat{AD} \rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} = 40^\circ$$

فاصله مرکز دایره از دو وتر مساوی AB و CD با یکدیگر برابر است یعنی $OH = OK$ بنابراین مرکز دایره روی نیمساز زاویه \widehat{KM} قرار دارد. داریم:

$$\widehat{M}_1 = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} = \frac{40^\circ + 40^\circ}{2} = 40^\circ \rightarrow \widehat{KM} = 180^\circ - \widehat{M}_1 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \rightarrow x = \frac{\widehat{KM}}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$



۲۱ - گزینه ۱ با توجه به شکل داریم:

$$AB = AD \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D}, \text{ محاطی } \widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2}, \text{ ظلی } \widehat{CAD} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow AC = CD$$

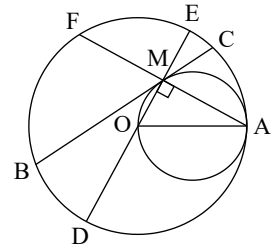
$$\Delta ABC \text{ محیط} = ۱۶ = AB + AC + BC = ۶ + AC + BC \Rightarrow AC + BC = ۱۰ \quad (1)$$

$$CD = AC \Rightarrow BD = BC + CD = BC + AC \stackrel{(1)}{=} ۱۰ \Rightarrow BD = ۱۰$$

$$AD^2 = CD \times BD \Rightarrow ۳۶ = CD \times ۱۰ \Rightarrow CD = ۳,۶ \Rightarrow BC = BD - CD = ۱۰ - ۳,۶ = ۶,۴$$

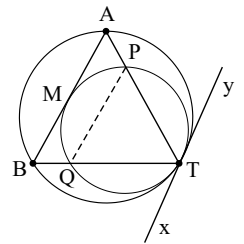
۲۲ - گزینه ۳ در دایره بزرگتر، وتر گذرنده از M و A و وتر گذرنده از M و O را رسم می‌کنیم. در دایره کوچکتر، زاویه \widehat{AMO} ، زاویه محاطی روبرو به قطر است، پس 90° است. در دایره بزرگتر، وتر DE از مرکز O می‌گذرد پس قطر است و از آنجا که قطر DE بر وتر عمود است لذا آن را نصف می‌کند یعنی $MA = MF$. حال با توجه به روابط طولی در دایره بزرگتر داریم:

$$MB \cdot MC = MA \cdot \overbrace{MF}^{MA} = MA^2 \Rightarrow MB \cdot MC = MA^2 \Rightarrow ۹ \times ۲ = MA^2 \Rightarrow MA = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$



۲۳ - گزینه ۲ مطابق شکل از T مماس xy رسم می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} (\text{زاویه ظلی}) \widehat{BAT} = \frac{\widehat{BT}}{2} = \widehat{BT}x \\ (\text{زاویه محاطی}) \widehat{QPT} = \frac{\widehat{QT}}{2} = \widehat{BT}x \end{cases} \Rightarrow \widehat{QPT} = \widehat{BAT} \Rightarrow PQ \parallel AB$$



از آنجا که وتر PQ با مماس AB موازی است، نتیجه می‌گیریم که $\widehat{PM} = \widehat{MQ} = 60^\circ$ و داریم:

$$\widehat{PT} = 360^\circ - (60^\circ + 60^\circ + 80^\circ) \Rightarrow \widehat{PT} = 160^\circ$$

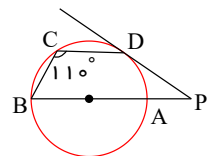
$$\Rightarrow \widehat{B} = \frac{\widehat{TPM} - \widehat{MQ}}{2} = \frac{160^\circ + 60^\circ - 60^\circ}{2} = 80^\circ$$

$$\text{زاویه محاطی } \widehat{C} = 110^\circ = \frac{180^\circ + \widehat{DA}}{2} \Rightarrow \widehat{DA} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{DA} = 140^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{P} = \frac{\widehat{BCD} - \widehat{AD}}{2} = \frac{140^\circ - 40^\circ}{2} = 50^\circ$$

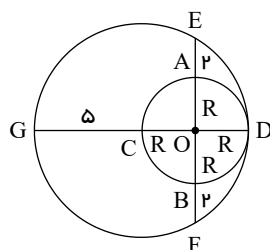
۲۴ - گزینه ۱

مطابق شکل و فرض سؤال داریم:



۲۵ - گزینه ۴

طبق روابط طولی در دایره بزرگتر داریم:



$$\begin{aligned} &: OD \times OG = OE \times OF \\ &\Rightarrow R(R + 5) = (R + 2)(R + 2) \\ &\Rightarrow R^2 + 5R = R^2 + 4R + 4 \\ &\Rightarrow R = 4 \end{aligned}$$

۲۶ - گزینه ۲ روش اول: در دو مثلث قائم‌الزاویه ABD و ABN با توجه به قضیه فیثاغورس داریم:



$$DB^2 - NB^2 = DA^2 - NA^2 \quad (1)$$

طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$\begin{cases} NB^2 = 2 \times 10 = 20 \\ DB^2 = x(x+5) \end{cases}$$

$$\stackrel{(1)}{\rightarrow} x(x+5) - 20 = (x+5)^2 - (2+8)^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 20 = x^2 + 10x + 25 - 100$$

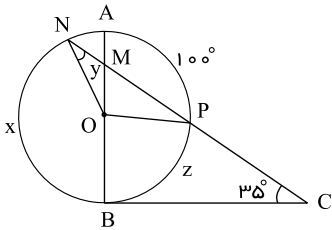
$$\Rightarrow 5x = 55 \Rightarrow x = 11$$

روش دوم: واضح است که قطر دایره است (چرا؟). پس زاویه‌های محاطی $\widehat{AMB}, \widehat{AHB}$ روبرو به قطر AB هستند و در نتیجه قائمه‌اند. طبق خواص مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\begin{cases} \triangle ABN : AB^2 = AM \cdot AN \Rightarrow AM \cdot AN = AH \cdot AD \Rightarrow 8 \times 10 = 5(5+x) \Rightarrow x = 11 \\ \triangle ABD : AB^2 = AH \cdot AD \end{cases}$$

توجه: نقاط D, N, M و H روی محیط یک دایره قرار می‌گیرند.

۲۷ - گزینه ۳ مطابق شکل، AB قطر دایره است، پس:



$$\Rightarrow z = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\widehat{C} = \frac{x-z}{2} \Rightarrow 35^\circ \times 2 = x - 80^\circ \Rightarrow x = 150^\circ \Rightarrow \widehat{AN} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

در مثلث NOP داریم:

$$\triangle NOP : ON = OP, \text{ مرکزی } \widehat{NOP} = \widehat{NP} = 100^\circ + 30^\circ = 130^\circ$$

$$\Rightarrow y = \frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ \Rightarrow x + y + z = 150^\circ + 25^\circ + 80^\circ = 255^\circ$$

۲۸ - گزینه ۳ مثلث‌های متشابه در شکل به صورت زیر هستند:

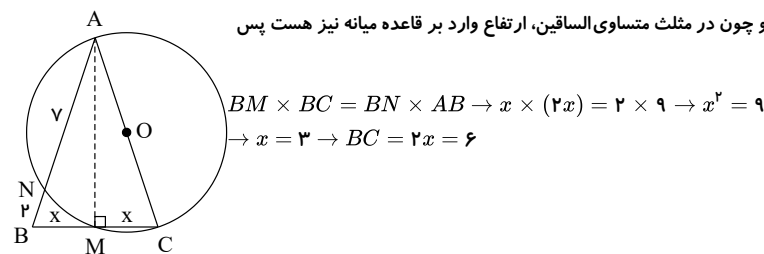
$$\triangle ABD \simeq \triangle ABE \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{AB}{AE}, \quad AB = AC \text{ (مماسهای رسم شده بر دایره)}$$

$$\triangle ADC \simeq \triangle ACE \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{AC}{AE}$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 6$$

۲۹ - گزینه ۳



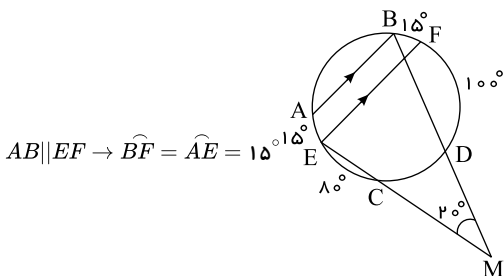
پاره خط AM را رسم می‌کنیم چون زاویه \widehat{AMC} روبرو به قطر است، قائمه می‌باشد و چون در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده میانه نیز هست پس

$BM = MC$ می‌باشد بنابراین رابطه‌ی طولی در دایره داریم:

$$BM \times BC = BN \times AB \rightarrow x \times (2x) = 2 \times 9 \rightarrow x^2 = 9$$

$$\rightarrow x = 3 \rightarrow BC = 2x = 6$$

۳۰ - گزینه ۴



$$AB \parallel EF \rightarrow \widehat{BF} = \widehat{AE} = 150^\circ$$



$$\left. \begin{aligned} \widehat{AB} + 15^\circ + 100^\circ + \widehat{CD} + 80^\circ + 15^\circ = 360^\circ &\rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CD} = 150^\circ \\ \frac{\widehat{AB} + 15^\circ - \widehat{CD}}{2} = 20^\circ &\rightarrow \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD} = 25^\circ}{2\widehat{CD} = 125^\circ \rightarrow \widehat{CD} = 62,5^\circ} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{محاطی } \widehat{ABD} = \frac{\widehat{AEC D}}{2} = \frac{15^\circ + 80^\circ + 62,5^\circ}{2} = 78,75^\circ$$

پاسخنامه تشریحی

۳۱ - گزینه ۲ رابطه فصلی $p \vee q$ فقط زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند و در سایر حالات صحیح می باشد.

$$p \wedge F \equiv F, \quad p \Rightarrow F \equiv \sim p \vee F \equiv \sim p, \quad T \Rightarrow p \equiv F \vee p \equiv p$$

۳۲ - گزینه ۳

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p \equiv [(q \vee \sim p) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p \equiv [(q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \Rightarrow \sim p \equiv [F \vee (\sim p \wedge \sim q)] \Rightarrow \sim p \equiv (\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p \\ \equiv \sim p \vee \sim (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee (p \vee q) \equiv (\sim p \vee p) \vee q \equiv T \vee q \equiv T$$

۳۳ - گزینه ۳ رابطه $p \Leftrightarrow q$ زمانی نادرست است که یکی از گزاره های p, q درست و دیگری نادرست باشد. در نتیجه $p \vee q$ درست و $p \wedge q$ نادرست می باشد. پس $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ نادرست است. در نتیجه:

$$\text{عبارت} \equiv r \Leftrightarrow F \equiv \sim r$$

r	F	$r \Leftrightarrow F$	$\sim r$
درست	F	نادرست	نادرست
نادرست	F	درست	درست

۳۴ - گزینه ۲ طبق جدول ارزش گزاره ها برای سه گزاره p, q, r داریم:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

همان طور که در جدول مشاهده می شود، در ردیف های ۲، ۴ و ۶ ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست است. در بین این سه ردیف، تنها در ردیف ۴ ارزش گزاره q نادرست است. پس احتمال مورد نظر $\frac{1}{3}$ است.

۳۵ - گزینه ۱

نکته:

- (۱) رابطه ی شرطی $p \Rightarrow q$ تنها زمانی نادرست است که مقدم (p) ارزش درست و تالی آن (q) دارای ارزش نادرست باشد و در سایر حالات این رابطه ارزش درستی دارد.
- (۲) رابطه ی دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ در صورتی که p و q هم ارزش باشند ارزش درستی دارد و در سایر حالات ارزش نادرستی دارد.

بررسی گزینه ها:

۱) $(\sim p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$

$$\underbrace{(F \Leftrightarrow T)}_F \Leftrightarrow \underbrace{(F \Leftrightarrow T)}_F \equiv T$$

۲) $(p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

$$\underbrace{(T \Leftrightarrow T)}_T \Leftrightarrow \underbrace{(T \Leftrightarrow F)}_F \equiv F$$

۳) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$



$$\underbrace{(T \Rightarrow (F \Rightarrow T))}_{T} \Rightarrow \underbrace{(T \Rightarrow F)}_F \equiv F$$

$$\text{۴) } (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q)$$

$$T \Rightarrow \underbrace{(F \Rightarrow T)}_T \Leftrightarrow \underbrace{(T \Rightarrow F)}_F \equiv F$$

۳۶ - گزینه ۱ نکته: رابطه شرطی $p \Rightarrow q$ را به صورت p شرط کافی است برای q و q شرط لازم است برای p ، می‌خوانیم. اگر $(\sim p \wedge q)$ درست باشد q درست است و p نادرست است بنابراین $p \Rightarrow q$ درست می‌باشد. پس:

$$(\sim p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

۳۷ - گزینه ۲

نکته:

$$۱) p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$۲) \sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$\text{نقیض عکس گزاره} \equiv \sim [(q \Rightarrow r) \Rightarrow p] \equiv (q \Rightarrow r) \wedge \sim p$$

۳۸ - گزینه ۳ بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: اگر p نادرست و q درست باشد، گزاره شرطی نادرست است.گزینه ۲: اگر p درست و q نادرست باشد، گزاره شرطی نادرست است.گزینه ۴: اگر p درست و q نادرست باشد، گزاره شرطی نادرست است.

در مورد گزینه ۳، داریم:

$$p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q) \equiv \sim p \vee (p \vee q) \equiv \underbrace{(\sim p \vee p)}_T \vee q \equiv T \vee q \equiv T$$

۳۹ - گزینه ۳

نکته:

$$۱) p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$۲) \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$۳) \sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$\sim (a + 1 \text{ فرد است} \Rightarrow a \text{ زوج است})$$

$$\equiv a + 1 \text{ فرد نیست} \wedge a \text{ زوج است}$$

$$\equiv a \text{ زوج است ولی } a + 1 \text{ فرد نیست}$$

۴۰ - گزینه ۱

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) \equiv [q \wedge (p \vee \sim q)] \vee [\sim p \wedge (p \vee \sim q)]$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$$

۴۱ - گزینه ۴

می‌دانیم مجموع عبارتهای مربع کامل زمانی صفر است که هر یک از آنها صفر باشند:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x+2)^2}{3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{4} = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \wedge \\ \frac{(x+2)^2}{3} = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \rightarrow S = \emptyset$$

$$(2x-1)^2 + (3y-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ \wedge \\ (3y-2)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

۴۲ - گزینه ۲ نقیض سور وجودی، به صورت سور عمومی است و نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ به صورت گزاره $p \wedge \sim q$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\sim (\exists x \in \mathbb{R}; x > 0 \Rightarrow x^2 \leq 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R}; x > 0 \wedge x^2 > 0$$

۴۳ - گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:



$$1) (p \Leftrightarrow F) \equiv (p \Rightarrow F) \wedge (F \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee F) \wedge (T \vee p) \equiv (\sim p) \wedge (T) \equiv \sim p$$

$$2) (p \Leftrightarrow T) \equiv (p \Rightarrow T) \wedge (T \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee T) \wedge (F \vee p) \equiv T \wedge p \equiv p$$

$$3) q \wedge \sim (q \vee p) \equiv q \wedge (\sim q \wedge \sim p) \equiv \underbrace{(q \wedge \sim q)}_F \wedge \sim p \equiv F \wedge (\sim p) \equiv F$$

۴۴ - گزینه ۱ بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱)

$$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 > 2x$$

$$x^2 - 2x + 2 > 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(2) = -4 < 0$$

چون $\Delta < 0$ و ضریب x^2 نیز مثبت است پس این معادله درجه ۲ همواره بزرگ‌تر از صفر بوده و مثال نقضی برای آن نداریم ارزش درست دارد.

گزینه (۲)

$$\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x-1}{x} = x$$

$$\frac{x-1}{x} = x \Rightarrow x-1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1) < 0$$

$\Delta < 0$ بوده پس معادله درجه ۲ دوم ریشه ندارد یعنی به‌ازای هیچ مقداری از x این معادله جواب ندارد پس ارزش گزاره سور وجودی نادرست است.

گزینه (۳)

$$\exists x \in \mathbb{R}; |x + \frac{1}{x}| < 2$$

می‌دانیم به‌ازای هر مقدار $x \in \mathbb{R}$ داریم: $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$ یعنی به‌ازای هیچ مقداری از $x \in \mathbb{R}$ رابطه $|x + \frac{1}{x}| < 2$ برقرار نیست پس ارزش سور وجودی نادرست است.

گزینه (۴)

$$\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

به‌ازای $x = 2$ رابطه $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$ نادرست است پس ارزش سور عمومی فوق نادرست است.

۴۵ - گزینه ۱ الف) اگر $n = 3$ باشد، $3^3 + 1 = 9$ است که عددی اول نیست، بنابراین ارزش گزاره «الف» نادرست است.

ب) گزاره «ب»، به‌ازای $x = 3$ نادرست است.

ج) ۲ عددی اول نیست و همچنین ۲ مربع کامل نیست و چون هر دو نادرست‌اند، ترکیب دوشروطی آن‌ها درست است.

د) گزاره سمت چپ به‌ازای $y = 3$ درست است. بنابراین این سور وجودی درست است و چون ترکیب فصلی داریم ارزش کل گزاره درست است (۱۹۱۷ بر ۳ بخش‌پذیر بوده و اول نیست)

پاسخنامه تشریحی

۴۶ - گزینه ۲ می‌دانیم این جدول، موسوم به سری الکتروسیته مالشی (تریبو الکتریک؛ *tribo* در زبان یونانی به معنای مالش است) می‌باشد. در این جدول مواد پایین‌تر، الکترون‌خواهی بیشتری دارند؛ یعنی اگر دو ماده در این جدول در تماس با یکدیگر قرار گیرند، الکترون‌ها از ماده بالاتر جدول به ماده‌ای که پایین‌تر قرار دارند منتقل می‌شود.

نکته دوم: بار الکتریکی یک کمیت کوانتومی است. یعنی مضرب درستی از بار الکتریکی e است: $(n \in \mathbb{N} \text{ و } q = \pm ne)$. از طرف دیگر بار ماده B باید منفی باشد: $q = -ne$ ؛ یعنی:

$$\frac{q}{e} = -n \rightarrow \begin{cases} \frac{3,6 \times 10^{-13}}{1,6 \times 10^{-19}} = 2,25 \notin \mathbb{N} \\ \frac{4,8 \times 10^{-13}}{1,6 \times 10^{-19}} = 3 \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow q_B = -4,8 \times 10^{-13} \mu C$$

۴۷ - گزینه ۳

$$q_r = q_1 + (\lambda \times 10^{12})(-1,6 \times 10^{-19} C) = 3q_1$$

$$2q_1 = -12,8 \times 10^{-9} C \rightarrow q_1 = -6,4 \times 10^{-9} C = -640 \rightarrow \boxed{q_1 = -640 nC}$$

۴۸ - گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

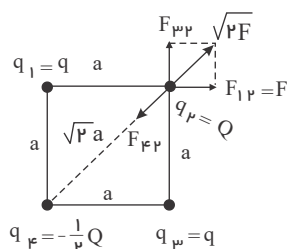
گزینه ۱: در این صورت ابتدا ورقه‌های الکتروسکوپ A بسته می‌شوند و دوباره باز می‌شوند و فاصله ورقه‌های الکتروسکوپ B کمی از حالت قبل کمتر شده ولی باز می‌ماند.
گزینه ۲: پس از مالش میله چوبی با پارچه پشمی، بار میله چوبی \ominus و بار پارچه پشمی \oplus می‌شود. همچنین پس از مالش میله شیشه‌ای با پارچه کتان، بار میله شیشه‌ای \oplus و بار پارچه کتان \ominus می‌شود. بنابراین در اثر تماس میله چوبی با الکتروسکوپ A ، الکتروسکوپ A دارای بار \ominus و پس از تماس میله شیشه‌ای با الکتروسکوپ B ، بار الکتروسکوپ B ، \oplus می‌شود. طبق فرض سؤال، الکتروسکوپ A که بار منفی دارد، بار کمتری در مقایسه با الکتروسکوپ B دارد. پس از بستن کلید k ، الکترون‌ها از الکتروسکوپ A به سمت الکتروسکوپ B می‌روند. چون بار الکتروسکوپ A کمتر است، بنابراین ابتدا بار الکتروسکوپ A [بار منفی] خنثی می‌شود و بار \oplus بین دو الکتروسکوپ توزیع می‌شود.

گزینه ۳: با توجه به شرایط مسئله $q_A < 0$ ، $q_B > 0$ ، $|q_A| < |q_B|$ بنابراین انحراف ورقه الکتروسکوپ B الزاماً کمتر از حالت قبل خواهد بود.

گزینه ۴: ورقه‌های الکتروسکوپ A می‌تواند پس از بسته شدن کلید K ، کمتر، بیشتر یا هم‌اندازه با حالت اولیه خود باز بماند.

۴۹ - گزینه ۲

اگر فرض کنیم $Q > 0$ آنگاه:



$$q_r = Q > 0$$

$$q_f = -\frac{1}{2}Q < 0$$

$$q_r > 0, q_1 > 0 \Rightarrow q > 0$$

و برای خنثی شدن نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_r می‌بایستی:

$$\begin{cases} \vec{F}_{fr} + \vec{F}_{1r} + \vec{F}_{mr} = \vec{0} \\ |\vec{F}_{1r}| = |\vec{F}_{mr}| = F \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_{fr} = -(\vec{F}_{1r} + \vec{F}_{mr}) \rightarrow |\vec{F}_{fr}| = |-(\vec{F}_{1r} + \vec{F}_{mr})| \rightarrow \frac{k|q_f|q_r}{(\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{2}F = \sqrt{2}\left(\frac{kqq_r}{a^2}\right) \rightarrow \frac{kQ}{2a^2} = \frac{\sqrt{2}(kqQ)}{a^2}$$

$$\rightarrow \frac{Q}{2} = \sqrt{2}q \rightarrow \frac{Q}{q} = 2\sqrt{2}$$

۵۰ - گزینه ۳

$$0,25q_1 = 20 \mu C \rightarrow \begin{cases} q'_1 = 80 - 20 = 60 \mu C \\ q'_2 = (-50) + 20 = -30 \mu C \end{cases}$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{q'_1|q'_2|}{q_1|q_2|} = \frac{60 \times 30}{80 \times 50} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20} \rightarrow \frac{\Delta F}{F} = -\frac{11}{20} = -55\% \text{ کاهش}$$

۵۱ - گزینه ۴ اندازه نیروی بین بارهای الکتریکی همنام q_1 و $q_2 = 5q_1$ از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2}, k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}, r = 3m, F = 0.2N$$

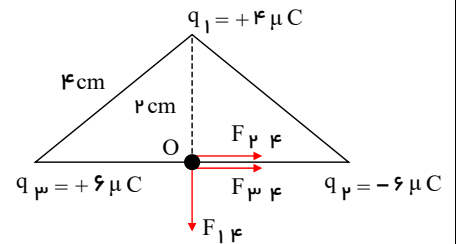
$$0.2 = \frac{9 \times 10^9 \times 5q_1^2}{3^2} \Rightarrow q_1^2 = 4 \times 10^{-12} \Rightarrow q_1 = 2 \times 10^{-6} C = 2 \mu C$$

۵۲ - گزینه ۴ ابتدا نیروی $F_{۲۴}$ و $F_{۳۴}$ که مساوی و هم جهت هستند را حساب کرده و برآیند می گیریم.

$$F_{۲۴} = F_{۳۴} = \frac{kq_۲q_۴}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-6}}{(\sqrt{12} \times 10^{-2})^2}$$

$$= \frac{54 \times 10^{-3}}{12 \times 10^{-4}} = 4.5 \times 10^1 = 45N$$

$$F_{۲۳} = F_{۲۴} + F_{۳۴} = 45 + 45 = 90N$$



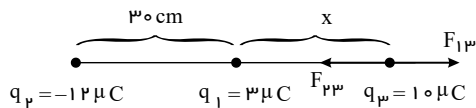
برای محاسبه ی $F_{۱۴}$ ، ابتدا فاصله ی $q_۴$ و q_1 را حساب می کنیم و داریم:

$$r^2 = ۲^2 + ۳^2 \Rightarrow r = \sqrt{13} \Rightarrow F_{۱,۴} = \frac{kq_1q_۴}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-6}}{(2 \times 10^{-2})^2} = \frac{36 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-4}} = 90N$$

و در نهایت دو بردار عمود بر هم داریم ($F_{۲۴}$, $F_{۳۴}$ و $F_{۱۴}$) که برآیند آن ها برابر است با:

$$F_T = \sqrt{(90)^2 + (90)^2} \Rightarrow F_T = 90\sqrt{2}N$$

۵۳ - گزینه ۲ قدم اول: چون دو بار الکتریکی $q_۱$ و $q_۲$ مختلف علامت هستند؛ بنابراین برای اینکه نیروهای الکتریکی وارد بر بار $q_۳$ از طرف بارهای q_1 و q_2 یکدیگر را خنثی کنند، بایستی این بار



روی خط واصل دو بار q_1 و q_2 و در خارج فاصله دو بار و نزدیک به باری باشد که مقدار آن کوچک تر است؛ یعنی:

قدم دوم: حال مقدار x (فاصله بار $q_۳$ تا بار q_1) را می یابیم: $F_{۲۳} = F_{۱۳}$

$$\rightarrow \frac{k|q_۲||q_۳|}{(30+x)^2} = \frac{k|q_1||q_۳|}{x^2} \rightarrow \frac{30+x}{x} = \frac{|q_۲|}{|q_1|} = \frac{12}{3} = 4 \rightarrow \frac{30+x}{x} = 4 \rightarrow x = 30cm$$

قدم سوم: حال برآیند نیروهای وارد بر بار q_1 را می یابیم:

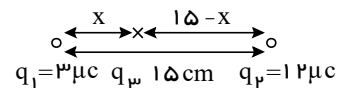
$$\rightarrow F_{۲1} = F_{۳1} = \frac{(9 \times 10^9)(12 \times 10^{-6})(3 \times 10^{-6})}{(30 \times 10^{-2})^2} = 3.6N \rightarrow F_{جس} = 2F_{۲1} = 7.2N$$

۵۴ - گزینه ۲ ابتدا محل قرارگیری بار $q_۳$ را مشخص کنیم. چون q_1 و q_2 هم نام هستند، پس بار سوم را باید در فاصله بین آنها قرار داد تا در حال تعادل باشد. مطابق شکل اگر فاصله $q_۳$ از q_1 ، x باشد شرط تساوی و خلاف جهت بودن نیروها را می نویسیم (شرط تعادل)

$$F_{۱۳} = F_{۲۳}$$

$$\frac{kq_1q_۳}{r^2} = \frac{kq_۲q_۳}{r^2} \Rightarrow \frac{3}{x^2} = \frac{12}{(15-x)^2}$$

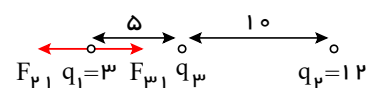
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(15-x)^2} \xrightarrow{\text{جز}} \frac{1}{x} = \frac{2}{15-x} \rightarrow x = 5cm$$



حال شرط تعادل بار q_1 (یا q_2) را بررسی می کنیم. قطعاً باید بار $q_۳$ منفی باشد. تا نیروها خلاف جهت شوند. و برای تساوی نیروها داریم

$$F_{۲1} = F_{۳1}$$

$$\frac{kq_۲q_1}{r^2} = \frac{kq_۳q_1}{r^2} \rightarrow \frac{12}{15^2} = \frac{q_۳}{5^2} \Rightarrow q_۳ = \frac{4}{3} \mu C$$



$$q_۳ = -\frac{4}{3} \mu C \leftarrow q_۳ \text{ منفی است}$$

۵۵ - گزینه ۳ در ابتدا باید بار الکتریکی ای که میدان الکتریکی را در اطراف خود ساخته، بیابیم.

$$E = \frac{kq}{r^2} \rightarrow (2.25 \times 10^5) = \frac{k(q)}{(0.8)^2} \rightarrow kq = 1.44 \times 10^5$$

$$\rightarrow F = \frac{kqq'}{r^2} = \frac{(1.44 \times 10^5)(9 \times 10^{-6})}{(0.9)^2} = 1.6N$$



→ $F = 1,76N$

۵۶ - گزینه ۱ در اینجا فقط با تغییر فاصله، میدان تغییر می‌کند، بنابراین داریم:

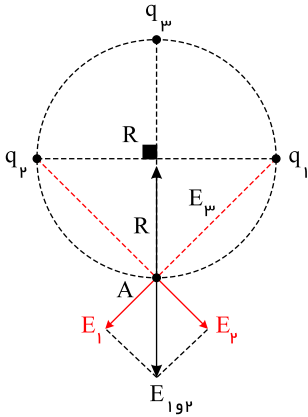
$$E = \frac{kq}{r^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{18}{8} = \left(\frac{r_2}{20}\right)^2 \Rightarrow \frac{9}{4} = \left(\frac{r_2}{20}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{r_2}{20} \Rightarrow r_2 = 30\text{ cm}$$

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 30 - 20 = 10\text{ cm}$$

توجه کنید که سؤال گفته چند سانتی متر دور شویم

۵۷ - گزینه ۲

برای اینکه میدان برآیند در نقطه A صفر شود می‌بایستی میدان برآیند بارهای q_1 و q_2 با میدان حاصل از بار q_3 در نقطه A خنثی شود. این امر، مستلزم این است که $E_{1,2}$ هم امتداد E_3 و خلاف جهت آن باشد و برای اینکه این اتفاق بیفتد می‌بایستی $E_2 = E_1$ باشد، در نتیجه باید $q_2 = q_1$. آنچه مهم است این می‌باشد که باید q_1 و q_2 هم علامت و مخالف علامت بار q_3 باشد.

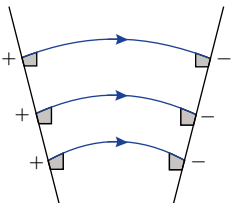


اینکه کدام مثبت و کدام منفی باشد مهم نیست. پس می‌توان به فرض $q_1 = q_2 > 0$ و $q_3 < 0$ را در نظر گرفت:

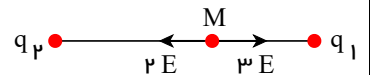
$$\begin{cases} r_1 = r_2 = \sqrt{2}R \text{ (شعاع دایره)} \\ r_3 = 2R \end{cases}$$

$$E_{1,2} = E_3 \Rightarrow \sqrt{2}E_1 = E_3 \Rightarrow \sqrt{2} \left(\frac{kq_1}{(\sqrt{2}R)^2} \right) = \frac{k|q_3|}{(2R)^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} q_1 = \frac{|q_3|}{4} \Rightarrow |q_3| = 2\sqrt{2} q_1$$

۵۸ - گزینه ۳ خط‌های میدان الکتریکی باید طوری رسم شوند که به سطح رسانا عمود باشند تا میدان هیچ مؤلفه‌ای در سطح رسانا نداشته باشد.



۵۹ - گزینه ۲ از جمع برداری میدان‌ها در نقطه M استفاده می‌کنیم:



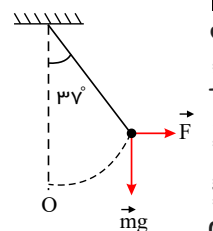
$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E} \\ 0 + E_2 = 3\vec{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}_1 + 3\vec{E} = \vec{E} \Rightarrow \vec{E}_1 = -2\vec{E}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{q_2}{q_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{q_2}{q_1} \times \left(\frac{d}{2d}\right)^2 \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = 6$$

۶۰ - گزینه ۴ می‌دانیم هرگاه آونگ تحت اثر نیروی F به اندازه زاویه α از وضع قائم منحرف شود و به تعادل برسد رابطه زیر برقرار است: $\tan \alpha = \frac{F}{mg}$

$$\tan \alpha = \frac{F_E}{mg} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{E \cdot q}{mg} \Rightarrow E = \frac{mg \tan 37^\circ}{q}$$

$$\Rightarrow E = \frac{0,4 \times 10^{-3} \times 10 \times \frac{3}{4}}{3 \times 10^{-6}} \Rightarrow E = 1000 \frac{N}{C}$$



از طرفی چون انحراف گلوله به سمت راست بوده، پس نیروی میدان به سمت راست و از آنجایی که بار الکتریکی منفی است، پس جهت میدان خلاف جهت نیروی میدان قرار دارد در نتیجه میدان به سمت چپ است.

پاسخنامه تشریحی

۶۱ - گزینه ۱ همه عبارتهای داده شده درست‌اند.

۶۲ - گزینه ۳

$$1 \rightarrow {}_{30}\text{Zn}^{2+} \rightarrow [\text{Ar}]\text{3d}^{10}, {}_{26}\text{Fe}^{3+} : [\text{Ar}]\text{3d}^6 \rightarrow \frac{10}{6} \approx 1,67$$

$$2 \rightarrow {}_{29}\text{Cu}^{2+} \rightarrow [\text{Ar}]\text{3d}^9, {}_{26}\text{Fe}^{3+} : [\text{Ar}]\text{3d}^6 \rightarrow \frac{9}{6} = 1,5$$

$$3 \rightarrow {}_{29}\text{Cu}^{2+} \rightarrow [\text{Ar}]\text{3d}^9, {}_{25}\text{Mn}^{2+} : [\text{Ar}]\text{3d}^5 \rightarrow \frac{9}{5} = 1,8$$

$$4 \rightarrow {}_{24}\text{Cr}^{2+} \rightarrow [\text{Ar}]\text{3d}^4, {}_{23}\text{V}^{2+} : [\text{Ar}]\text{3d}^3 \rightarrow \frac{4}{3} \approx 1,33$$

۶۳ - گزینه ۳

اتم مورد نظر ${}_{17}\text{Cl}$ است و عبارتهای (ب) و (پ) و (ت) در مورد آن درست‌اند.

$${}_{17}\text{Cl} : 1s^2, 2s^2, 2p^6, \quad \begin{matrix} 3s^2 \\ \downarrow \\ (n+l=3+0=3) \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 3p^5 \\ \downarrow \\ (n+l=3+1=4) \end{matrix} \rightarrow (3 \times 2) + (4 \times 5) = 26$$

(آ) در اتم ${}_{17}\text{Cl}$ ، ۶ الکترون با $\ell = 0$ (زیرلایه‌های s) و ۱۱ الکترون با $\ell = 1$ (زیرلایه p) وجود دارد.

$$6 + 11 = 17$$

(ب) گاز کلر در دمای اتاق به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

(پ) هفتمین عنصر دسته p، آلومینیم است که مانند کلر دارای ۶ الکترون با $\ell = 0$ است.

$${}_{13}\text{Al} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$$

(ت) یون پایدار کلر، Cl^- است که آرایش آن به $3s^2 3p^6$ ختم می‌شود.

$$(n + \ell) \text{ مجموع} = 2 \underbrace{(3 + 0)}_{3s} + 6 \underbrace{(3 + 1)}_{3p} = 30$$

۶۴ - گزینه ۲ عناصر براساس رفتارشان (نه میزان واکنش‌پذیری‌شان) به سه دسته فلز، نافلز و شبه‌فلز تقسیم می‌شوند.

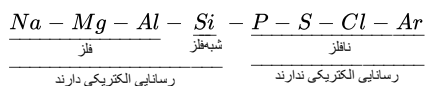
۶۵ - گزینه ۳ به‌جز عبارت «ت»، بقیه عبارتهای درست‌اند.

$$\text{عنصر } C = M, \quad \text{عنصر } Si = N, \quad \text{عنصر } Ge = X, \quad \text{عنصر } Sn = Y$$

عنصرهای C، Si و Ge، الکترون به اشتراک می‌گذارند اما Sn و Pb، الکترون از دست می‌دهند و به‌صورت کاتیون در می‌آیند.

۶۶ - گزینه ۲ عبارتهای سوم تا پنجم درست‌اند.

عبارت پنجم: دوره سوم شامل ۸ عنصر زیر است:



بررسی عبارتهای نادرست:

عبارت اول: در هر دوره بیش‌ترین خصلت نافلزی مربوط به عنصرهای گروه ۱۷ است نه گازهای نجیب! در دوره سوم بیش‌ترین خصلت نافلزی مربوط به کلر (${}_{17}\text{Cl}$) است.

عبارت دوم: فقط بعضی از فلزها (مانند فلزهای گروه ۱ و ۲) واکنش‌پذیری زیادی دارند. بعضی فلزها مانند طلا، واکنش‌پذیری ناچیزی دارند.

۶۷ - گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} n + p &= 51 \\ n - (p - 3) &= 8 \rightarrow n - p + 3 = 8 \rightarrow n - p = 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2p = 46 \rightarrow p = 23$$

$${}_{23}\text{A} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^3 4s^2$$

در زیرلایه d اتم A، ۳ الکترون وجود دارد.

۶۸ - گزینه ۱ به‌جز عبارت دوم، بقیه عبارتهای درست‌اند. در یک دوره تعداد لایه‌های الکترونی ثابت است نه تعداد زیرلایه‌ها!

۶۹ - گزینه ۲ عناصر ${}_{29}\text{Cu}$ ، ${}_{30}\text{Zn}$ ، ${}_{31}\text{Ga}$ ، ${}_{32}\text{Ge}$ ، ${}_{33}\text{As}$ ، ${}_{34}\text{Se}$ ، ${}_{35}\text{Br}$ ، ${}_{36}\text{Kr}$ دارای تراز 3d کاملاً پر هستند.

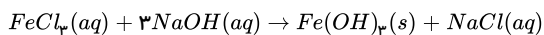
۷۰ - گزینه ۱ عبارتهای دوم و چهارم نادرست‌اند.

عبارت دوم: استخراج طلا نیز آثار زبان‌بار زیست‌محیطی بر جای می‌گذارد.

عبارت چهارم: فلز طلا چکش‌خوار است و در اثر ضربه خرد نمی‌شود.



۷۱ - گزینه ۲ طبق واکنش زیر:

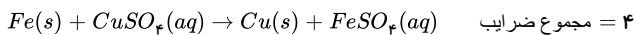


در پایان واکنش، فقط یونهای Cl^- و Na^+ به صورت محلول در ظرف واکنش وجود دارند.

۷۲ - گزینه ۳ با مصرف یونهای Cu^{2+} ، از شدت رنگ آبی محلول کاسته می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

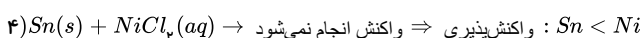
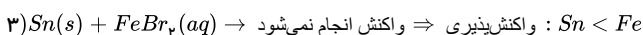
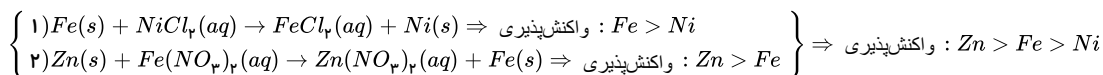
(۱)



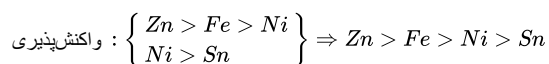
(۲) واکنش‌پذیری Al و Fe هر دو از Cu بیشتر است؛ بنابراین در هر دو صورت واکنش انجام می‌شود.

(۴) جرم مولی Cu از Fe بیشتر است، در نتیجه جرم مواد جامد در ظرف با گذشت زمان زیاد می‌شود.

۷۳ - گزینه ۲ ترتیب واکنش‌پذیری فلزات مورد نظر به صورت زیر تعیین می‌شود:



پس:



۷۴ - گزینه ۴ فقط عبارت (ب) درست است.

(آ) واکنش‌پذیری X از Y کمتر است، در نتیجه شرایط نگهداری آن آسان‌تر است.

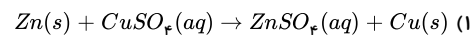
(ب) واکنش‌پذیری آهن از Y و در نتیجه از X بیشتر است و واکنش ذکر شده انجام‌ناپذیر است.

(پ) واکنش‌پذیری Y بیشتر از مس است ولی واکنش‌پذیری طلا کمتر از مس است، در نتیجه Y نمی‌تواند طلا باشد.

(ت) شکل موازنه شده معادله به صورت $2XNO_3 + Y \rightarrow Y(NO_3)_2 + 2X$ است که مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در آن برابر ۶ است.

۷۵ - گزینه ۴ واکنش‌پذیری پلاتین از مس کمتر است و واکنش انجام‌ناپذیر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:



(۲) خصلت فلزی روی از پلاتین بیشتر است، در نتیجه تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون دارد.

(۳) از آنجایی که واکنش‌پذیری فلز مس کمتر از فلز روی است، واکنش صورت نمی‌گیرد و نگهداری $ZnSO_4$ در ظرف مسی بلا مانع است.